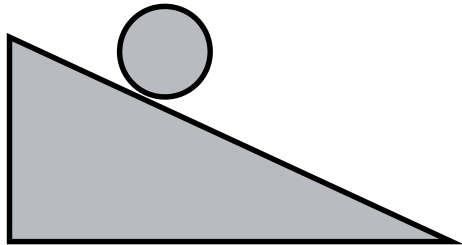


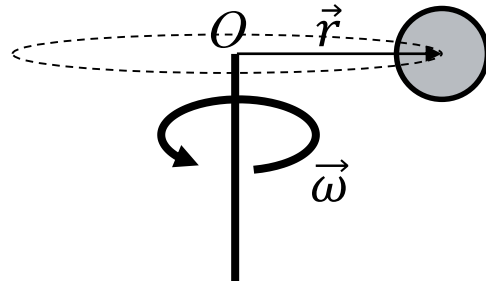
8.1 Comparaison qualitative

Point materiel de masse m

Glissement ou rotation



$$\vec{p} = m\vec{v}$$

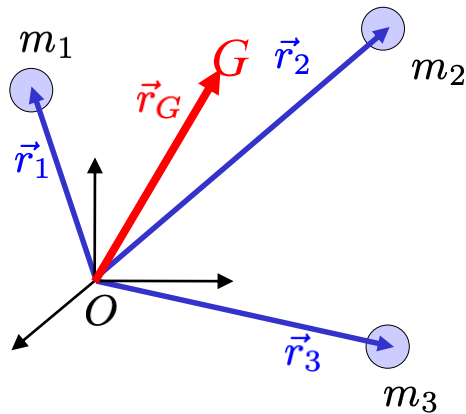


$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$



$$\sum_{\alpha}^N$$

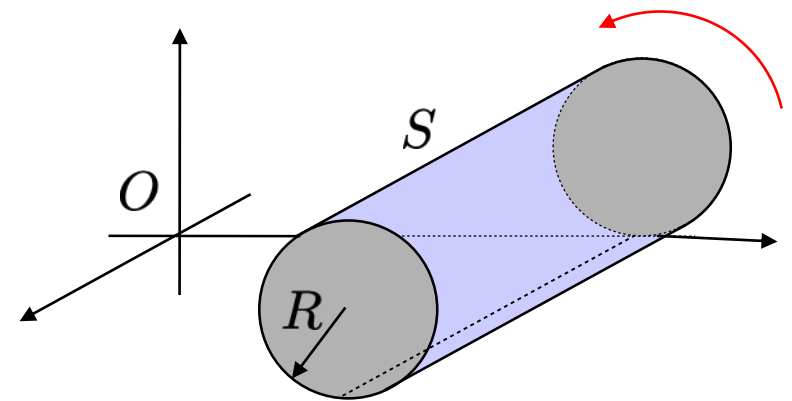
système de points matériels



$$\vec{p} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = M \vec{v}_G \quad \vec{L}_O = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$$

Solide indéformable

Glissement et rotation



$$\vec{p} = M \vec{v}_G$$

$$\vec{L}_O = \tilde{I}_O \vec{\omega}$$

$$\int \rho \dots dr^3$$

\tilde{I}_O est le moment d'inertie

8.3 Calcul du moment cinétique d'un solide

Rappel: pour chaque point P du solide

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} \quad \text{avec } \vec{v}'_P = 0$$

- Par rapport à un point A appartenant au solide:

$$\vec{L}_A = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AP_{\alpha}} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AP_{\alpha}} \wedge m_{\alpha} (\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_{\alpha}})$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}$$

$$= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{AP_{\alpha}} \wedge \vec{v}_A + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{AP_{\alpha}} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_{\alpha}})$$

$$\vec{L}_A = \underbrace{\overrightarrow{AG}} \wedge M \vec{v}_A + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\overrightarrow{AP_{\alpha}})^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{AP_{\alpha}} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{AP_{\alpha}} \right]$$

|| 0 si A = G (centre de masse) ou
si $\vec{v}_A = 0 \Leftrightarrow$ A = C fixe sur axe de rotation



$$\vec{L}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\overrightarrow{GP_{\alpha}})^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{GP_{\alpha}} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{GP_{\alpha}} \right]$$

Rappel:
si le solide est « continu », il faut remplacer
la somme sur les points matériels
par une intégrale sur le volume du solide

$$\begin{cases} m_{\alpha} & \rightarrow dm(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} \\ \sum_{\alpha} & \rightarrow \int_{\text{volume du solide}} \\ \rho(\vec{r}) & = \text{masse volumique} \end{cases}$$

8.3 Moment d'inertie par rapport au CM (ou C sur axe de rotation)

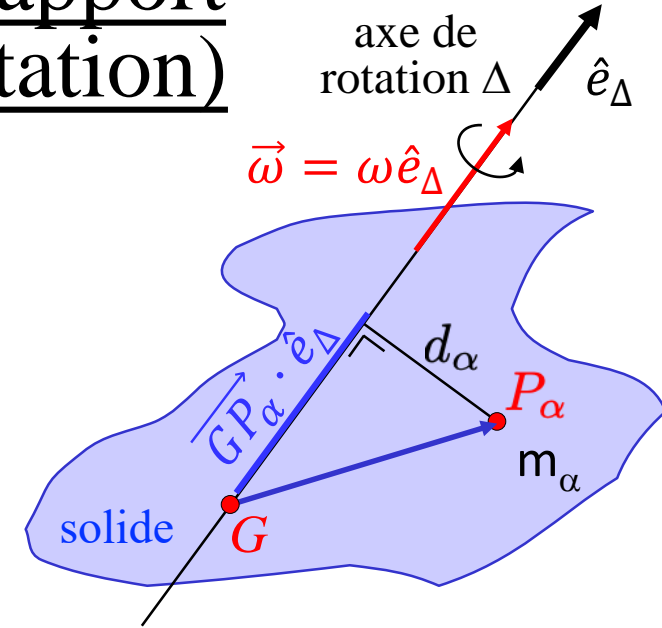
- Moment cinétique par rapport à G (ou n'importe quel point C fixe sur l'axe de rotation Δ) :

$$\vec{L}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\overrightarrow{GP_{\alpha}})^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{GP_{\alpha}} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{GP_{\alpha}} \right]$$

- Faisons une projection sur l'axe de rotation Δ ($\vec{\omega} = \omega \hat{e}_{\Delta}$ parallèle à axe Δ):

$$L_{\Delta} = \vec{L}_G \cdot \hat{e}_{\Delta} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\overrightarrow{GP_{\alpha}})^2 \omega \hat{e}_{\Delta} - (\overrightarrow{GP_{\alpha}} \cdot \omega \hat{e}_{\Delta}) \overrightarrow{GP_{\alpha}} \right] \cdot \hat{e}_{\Delta} =$$

$$\omega \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\overrightarrow{GP_{\alpha}})^2 - (\overrightarrow{GP_{\alpha}} \cdot \hat{e}_{\Delta})^2 \right] = \omega \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2 \quad \leftrightarrow \quad L_{\Delta} \text{ ne dépend pas de } G \text{ (ou } C \text{)!}$$



- **Moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ :**

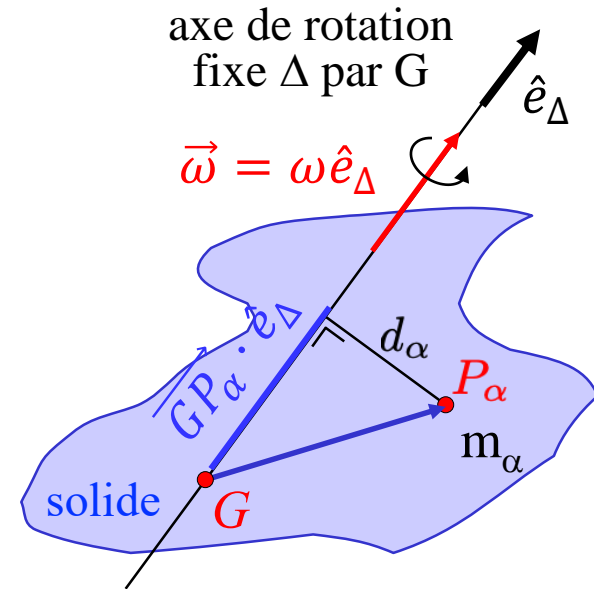
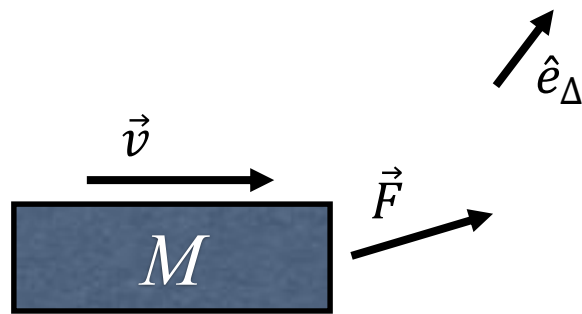
$$I_{\Delta} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$$

$$L_{\Delta} = \vec{L}_G \cdot \hat{e}_{\Delta} = I_{\Delta} \omega$$

- Remarques:

- I_{Δ} dépend seulement de la distribution de masse par rapport à l'axe Δ
- En général, \vec{L}_G n'est pas parallèle à $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_{\Delta}$
- Si Δ est un axe de symétrie du solide et $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_{\Delta}$, alors \vec{L}_G est parallèle à $\vec{\omega}$

8.3 Masse (d'inertie) et moment d'inertie



2^{eme} loi de Newton

$$F_{\Delta} = \vec{F} \cdot \hat{e}_{\Delta} = M \vec{a}_G \cdot \hat{e}_{\Delta} = M \frac{d\vec{v}_G \cdot \hat{e}_{\Delta}}{dt} = M \frac{dv_{G\Delta}}{dt}$$

$$L_{\Delta} = \vec{L}_G \cdot \hat{e}_{\Delta} = \omega \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2 = I_{\Delta} \omega$$

$$M_{\Delta} = \vec{M}_G \cdot \hat{e}_{\Delta} = \frac{d\vec{L}_G}{dt} \cdot \hat{e}_{\Delta} = \frac{dL_G \cdot \hat{e}_{\Delta}}{dt} = \frac{dL_{\Delta}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext} - \vec{v}_A \wedge M \vec{v}_G = I_{\Delta} \frac{d\omega}{dt}$$

La **MASSE** (inertielle ou d'inertie) mesure la résistance (inertie) qu'oppose le corps à toute accélération ou à toute modification de l'état de **MOUVEMENT RECTILIGNE** (translation)

La **MOMENT D'INERTIE** mesure la résistance qu'oppose le corps à toute modification de l'état de **ROTATION**.

8.3 Tenseur d'inertie par rapport au CM

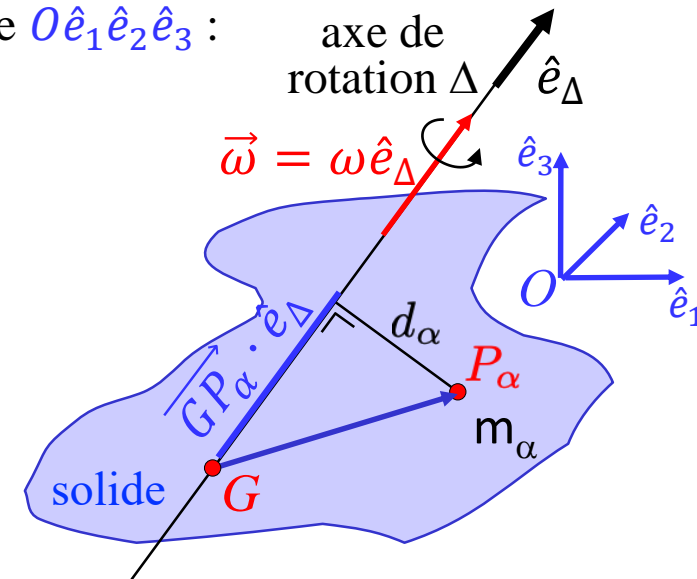
- Moment cinétique par rapport au centre de masse G :

$$\vec{L}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\overrightarrow{GP_{\alpha}} \right)^2 \vec{\omega} - \left(\overrightarrow{GP_{\alpha}} \cdot \vec{\omega} \right) \overrightarrow{GP_{\alpha}} \right]$$

- En coordonnées cartésiennes, dans un repère orthonormé quelconque $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$:

$$\vec{L}_G = \sum_i L_{G,i} \hat{e}_i \quad \vec{\omega} = \omega \hat{e}_{\Delta} = \sum_i \omega_i \hat{e}_i$$

$$\begin{aligned} L_{G,i} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\overrightarrow{GP_{\alpha}} \right)^2 \omega_i - \left(\sum_j (GP_{\alpha})_j \omega_j \right) (GP_{\alpha})_i \right] \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\overrightarrow{GP_{\alpha}} \right)^2 \sum_j \delta_{ij} \omega_j - \sum_j (GP_{\alpha})_j \omega_j (GP_{\alpha})_i \right] \\ &= \sum_j \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\overrightarrow{GP_{\alpha}} \right)^2 \delta_{ij} - (GP_{\alpha})_j (GP_{\alpha})_i \right]}_{=(\tilde{I}_G)_{ij} \text{ (élément d'une matrice } 3 \times 3)} \omega_j = \sum_j (\tilde{I}_G)_{ij} \omega_j \end{aligned}$$



- En notation matricielle:

$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega}$$

- \tilde{I}_G = tenseur d'inertie au centre de masse G

$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} I_{G11} & I_{G12} & I_{G13} \\ I_{G21} & I_{G22} & I_{G23} \\ I_{G31} & I_{G32} & I_{G33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{G11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G33} \end{pmatrix}$$

- Matrice symétrique: $I_{Gij} = I_{Gji}$
donc diagonalisable ($I_{Gji} = 0$ si $i \neq j$)

8.3 Axes principaux d'inertie

- **Théorème:**

- se démontre en algèbre linéaire

Pour tout point C d'un solide, il existe un repère orthonormé au point C tel que la matrice représentant le tenseur d'inertie soit diagonale :

$$\tilde{I}_C = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

- Définitions (au point C):

- Repère d'inertie: repère dans lequel \tilde{I}_C est une matrice diagonale
- Axes principaux d'inertie: axes du repère d'inertie
- Moments principaux d'inertie: moments d'inertie par rapport aux axes principaux d'inertie (les éléments diagonaux de \tilde{I}_C dans le repère d'inertie)

- Dans repère d'inertie: $\vec{L}_C = \tilde{I}_C \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix}$ \vec{L}_C n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$

- Rotation autour d'un axe fixe Δ passant par C : Si

$$\vec{L}_C = I_\Delta \vec{\omega} \Leftrightarrow \Delta \text{ est un axe principal d'inertie}$$

Est un axe principale d'inertie: - un axe de symétrie du solide
 - un axe perpendiculaire à un plan de symétrie du solide

8.3 Ex. tenseur d'inertie d'une roue

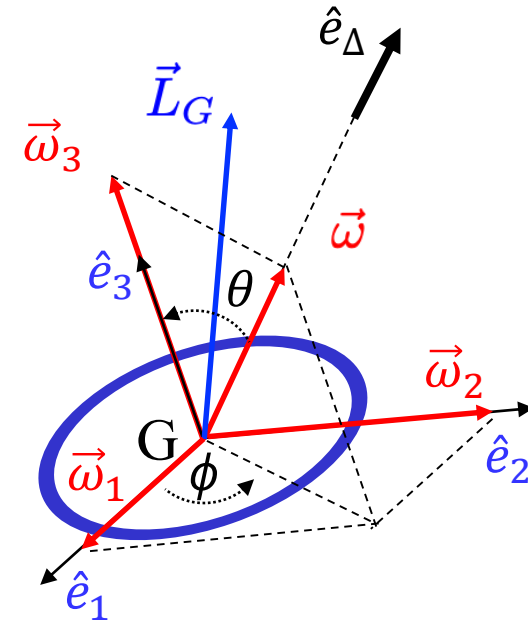
- Roue en rotation autour d'un axe Δ quelconque passant par G .
- Axes principaux d'inertie:
 - \hat{e}_3 car axe de symétrie
 - \hat{e}_1, \hat{e}_2 car perpendiculaires à un plan verticale passant par \hat{e}_3
- Dans le repère d'inertie $G\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$:

$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{pmatrix}$$

\tilde{I}_G est une matrice diagonale

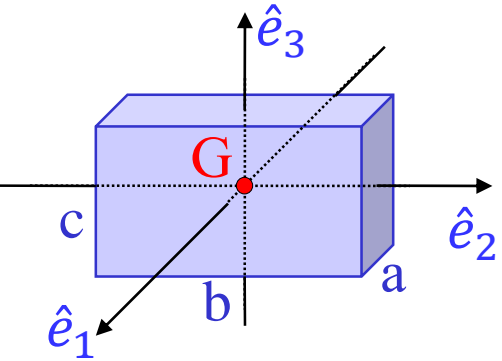
$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 1/2MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{pmatrix} \cdot \omega \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = MR^2 \omega \begin{pmatrix} 1/2 \sin \theta \cos \phi \\ 1/2 \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

- \vec{L}_G n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$, mais dans le plan défini par $\vec{\omega}$ et l'axe de la roue
- Si la rotation se effectue autour d'un axe de symétrie (I_{G11}, I_{G22} ou I_{G33}) alors \vec{L}_G est parallèle à $\vec{\omega}$. Par ex.: $\hat{e}_\Delta \parallel \hat{e}_3$



8.3 Cas particuliers simples

Axes et moments d'inertie principaux par rapport au centre de masse G de quelques solides homogènes de masse M



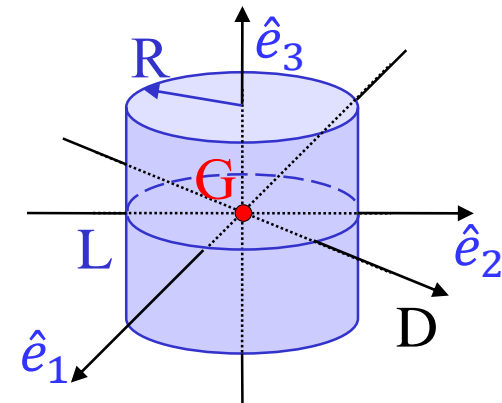
- Parallélépipède rectangle plein :
(plaque rectangulaire si a, b ou $c \rightarrow 0$)

$$I_1 = \frac{1}{12}M(b^2 + c^2)$$

$$I_2 = \frac{1}{12}M(c^2 + a^2)$$

$$I_3 = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$

« toupie asymétrique » :
seulement trois axes
principaux par G



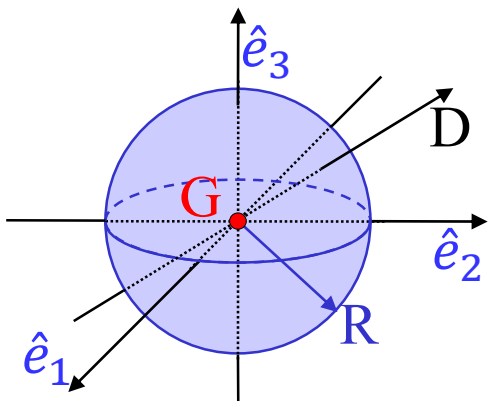
- Cylindre de révolution :
(tige si $R \rightarrow 0$, disque si $L \rightarrow 0$)

plein : $I_1 = I_2 = I_{\Delta} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2, \quad I_3 = \frac{1}{2}MR^2$

vide : $I_1 = I_2 = I_{\Delta} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2, \quad I_3 = MR^2$

↙ sans masse sur les bases circulaires

« toupie symétrique » :
tout axe Δ par G dans le
plan 12 est principal



- Sphère:

pleine : $I_1 = I_2 = I_3 = I_{\Delta} = \frac{2}{5}MR^2$

vide : $I_1 = I_2 = I_3 = I_{\Delta} = \frac{2}{3}MR^2$

« toupie sphérique » :
tout axe Δ par G
est principal

8.3 Tenseur d'inertie par rapport à un point A du solide

- Par rapport à un point A appartenant au solide:

$$\vec{L}_A = \vec{AG} \wedge M\vec{v}_A + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\overrightarrow{AP_{\alpha}})^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{AP_{\alpha}} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{AP_{\alpha}} \right] = \vec{AG} \wedge M\vec{v}_A + \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}$$

$$\tilde{I}_{Aij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\overrightarrow{AP_{\alpha}})^2 \delta_{ij} - (AP_{\alpha})_i (AP_{\alpha})_j \right]$$

\tilde{I}_A = tenseur d'inertie au point A

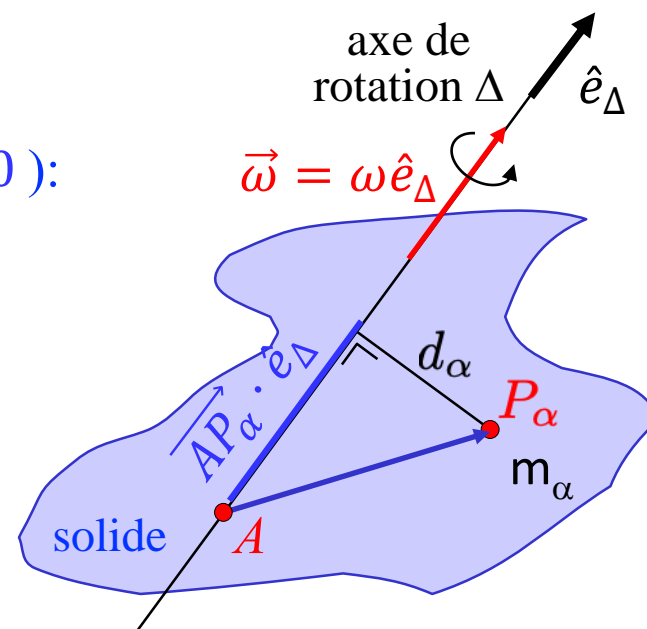
Dans un repéré d'inertie

$$\tilde{I}_A = \begin{pmatrix} I_{A11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{A22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{A33} \end{pmatrix} \neq \tilde{I}_G$$

- Si A est un point sur l'axe de rotation Δ fixe ($\vec{v}_A = 0$):

$$L_{\Delta} = \vec{L}_A \cdot \hat{e}_{\Delta} = \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega} \cdot \hat{e}_{\Delta} = \omega \tilde{I}_A \cdot \hat{e}_{\Delta} \cdot \hat{e}_{\Delta} = \omega I_{\Delta}$$

$$I_{\Delta} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$$



8.3 Formule de Steiner

Relation entre le moment d'inertie par rapport à un axe fixe par C (Δ_C) et le moment d'inertie par rapport à un axe de même direction mais passant par le centre de masse G (Δ_G):

$$L_\Delta = \vec{L}_C \cdot \hat{e}_\Delta = I_{\Delta_C} \omega$$

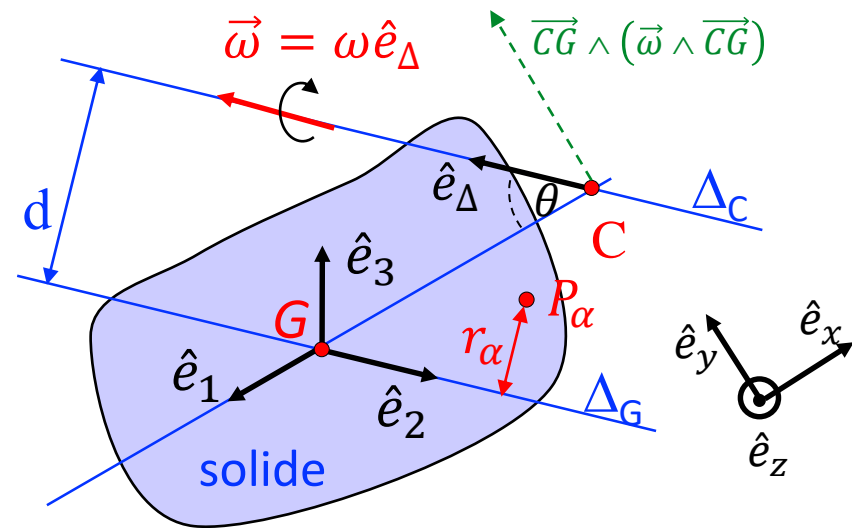
1^{er} théorème de König:

$$\vec{L}_C = \vec{L}_G + \overrightarrow{CG} \wedge m\vec{v}_G$$

$$L_\Delta = \vec{L}_C \cdot \hat{e}_\Delta = \vec{L}_G \cdot \hat{e}_\Delta + m \overrightarrow{CG} \wedge (\vec{v}_G \wedge \overrightarrow{CG}) \cdot \hat{e}_\Delta = I_{\Delta_G} \omega + m \omega d^2 = \omega (I_{\Delta_G} + m d^2)$$

$$I_{\Delta_C} = I_{\Delta_G} + m d^2$$

Formule de Steiner



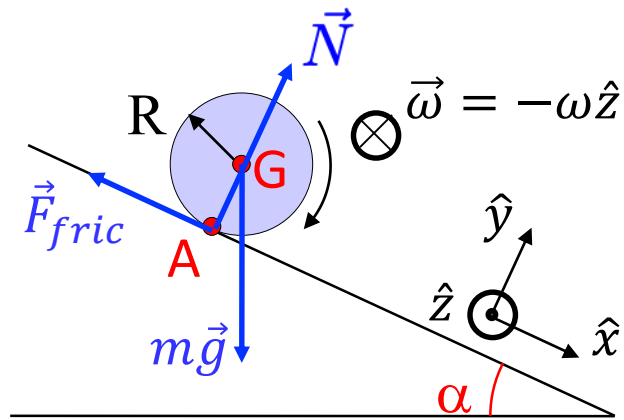
$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG} = \omega d \hat{e}_z$$

$$\overrightarrow{CG} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG}) = \frac{d}{\sin \theta} \omega d \hat{e}_y$$

$$\overrightarrow{CG} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG}) \cdot \hat{e}_\Delta = \frac{d}{\sin \theta} \omega d \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

Théorème de Steiner: généralisation de la formule de Steiner permettant de calculer le tenseur d'inertie au point C quelconque d'un solide connaissant celui au centre de masse G

8.3 Ex.: Roulement sans glissement sur plan incliné



Cylindre plein roulant sans glisser: $v_A = 0$

Indiquer les forces externes agissantes sur le system

- Le centre de masse G est sur l'axe du cylindre: $v_G = \omega R$
- Théorème du centre de masse

$$m\vec{a}_G = \vec{F}_{fric} + \vec{N} + m\vec{g} \Rightarrow \begin{cases} ma_G = mg \sin \alpha - F_{fric} \\ 0 = N - mg \cos \alpha \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- Le système d'équations n'est pas suffisante pour résoudre le problème
- Théorème du moment cinétique

Appliqué en G

$$\vec{L}_G = I_{Gz}\vec{\omega} = \frac{1}{2}mR^2\vec{\omega} = -\frac{1}{2}mRv_G\hat{z}$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{ext} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ -\frac{1}{2}mRa_G = -RF_{fric} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \frac{1}{2}ma_G = F_{fric} \end{cases}$$

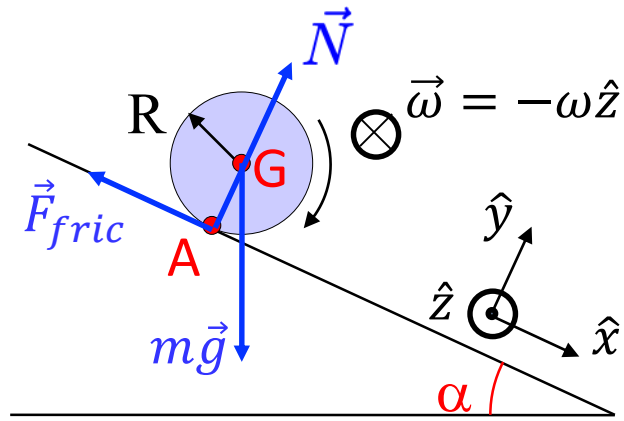


$$a_G = \frac{2}{3}g \sin \alpha$$

$$F_{fric} = \frac{1}{3}mg \sin \alpha$$

$$N = mg \cos \alpha$$

8.3 Ex.: Roulement sans glissement sur plan incliné



Cylindre plein roulant sans glisser: $v_A = 0$

Indiquer les forces externes agissantes sur le system

- Le centre de masse G est sur l'axe du cylindre: $v_G = \omega R$
- Théorème du centre de masse

$$m\vec{a}_G = \vec{F}_{fric} + \vec{N} + m\vec{g} \Rightarrow \begin{cases} ma_G = mg \sin \alpha - F_{fric} \\ 0 = N - mg \cos \alpha \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- Le système d'équations n'est pas suffisante pour résoudre le problème
- Théorème du moment cinétique

Appliqué en A

$$\vec{L}_A = I_A \vec{\omega} \quad I_A = I_{GZ} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 \quad (\text{Formule de Steiner})$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ -\frac{3}{2}mRa_G = -Rmg \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \frac{3}{2}a_G = g \sin \alpha \end{cases}$$

$$a_G = \frac{2}{3}g \sin \alpha$$

$$F_{fric} = \frac{1}{3}mg \sin \alpha$$

$$N = mg \cos \alpha$$

8.3 Ex.: Meule tournante à vitesse constante

<https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/224>

- Description et hypothèses :

- Meule: disque mince (épaisseur ≈ 0) de masse m , rayon R , centre de masse G
- Axe de la meule CG : horizontal, sans masse, longueur d
- Roulement sans glissement sur le sol (friction très petites pour simplifier), et point C fixe sur un axe vertical
- $\vec{\omega} = -\omega \hat{e}_\rho$ rotation propre de la meule, $\vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_z$ rotation autour de l'axe vertical

- Vecteur instantané de rotation total = $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$

$$\begin{cases} \vec{0} = \vec{v}_A = \vec{v}_G + (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GA} \\ \vec{0} = \vec{v}_C = \vec{v}_G + (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GC} \end{cases}$$



$$\Rightarrow (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GA} = (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GC}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GA} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GC}$$

$$\Rightarrow \omega R = \Omega d$$

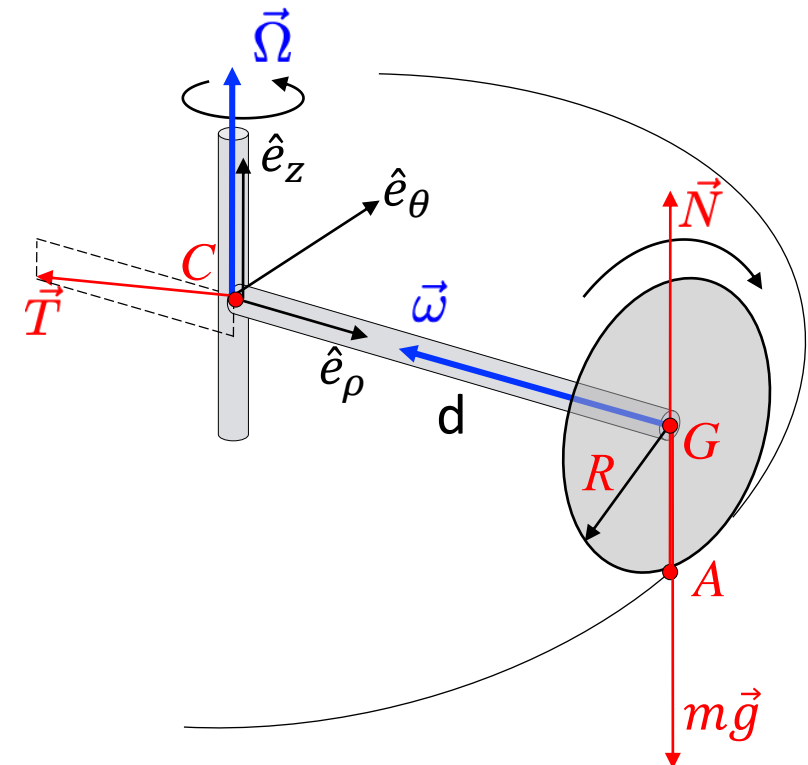
$$\vec{v}_G = (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{CG} = \Omega d \hat{e}_\theta$$

$$\vec{a}_G = \Omega d \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \Omega d \vec{\Omega} \wedge \hat{e}_\theta = -d\Omega^2 \hat{e}_\rho$$

$$\vec{\omega} \parallel \overrightarrow{GC} \Rightarrow \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GC} = 0 \quad \vec{\Omega} \parallel \overrightarrow{GA} \Rightarrow \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GA} = 0$$

N.B.: pour chaque couple de points P, A d'un solide

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(\vec{r}_A + \overrightarrow{AP}) = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{tot} \wedge \overrightarrow{AP}$$



8.3 Ex.: Meule tournante à vitesse constante

$$\vec{\omega} = -\omega \hat{e}_\rho, \vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_z, \omega R = \Omega d, \vec{a}_G = -d\Omega^2 \hat{e}_\rho$$

• Equations du mouvement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_G = \vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -m\Omega^2 d = T_\rho \\ 0 = T_\theta \\ 0 = T_z + N - mg \end{cases}$$

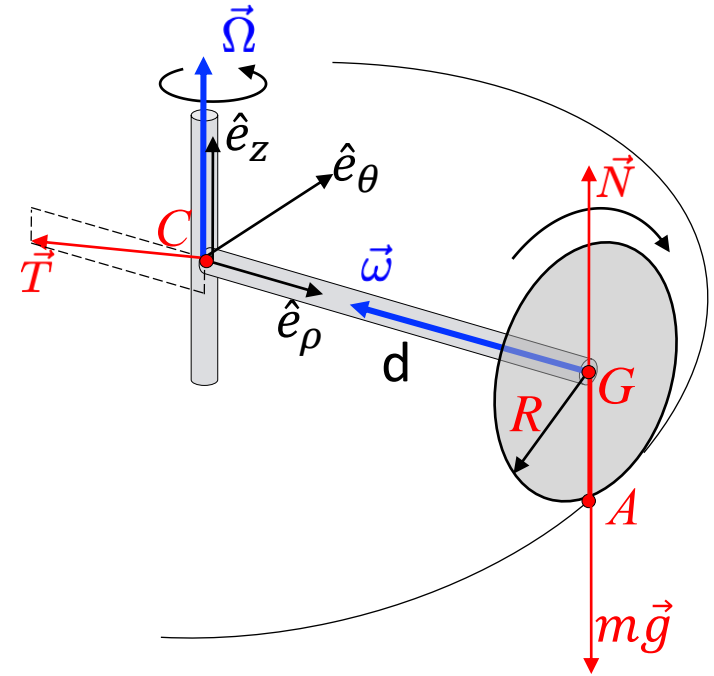
- Théorème du moment cinétique

$$\vec{T} \text{ est non connu } \Rightarrow \text{ application en C} \quad \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{ext}$$

$$\tilde{I}_C = \begin{pmatrix} 1/2mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4mR^2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_C &= \tilde{I}_C \cdot (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) = (\tilde{I}_C)_{11} \vec{\omega} + (\tilde{I}_C)_{33} \vec{\Omega} \\ &= -\frac{1}{2}mR^2\omega \hat{e}_\rho + \left(\frac{1}{4}mR^2 + md^2\right)\Omega \hat{e}_z \end{aligned}$$

$$\frac{d\hat{e}_z}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_C}{dt} = -\frac{1}{2}mR^2\omega \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = -\frac{1}{2}mR^2\omega \vec{\Omega} \wedge \hat{e}_\rho = -\frac{1}{2}mR^2\omega \Omega \hat{e}_\theta$$



(Formule de Steiner)

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \quad \vec{CG} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8.3 Ex.: Meule tournante à vitesse constante

$$\vec{\omega} = -\omega \hat{e}_\rho, \vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_z, \omega R = \Omega d, \vec{a}_G = -d\Omega^2 \hat{e}_\rho$$

• Equations du mouvement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_G = \vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -m\Omega^2 d = T_\rho \\ 0 = T_\theta \\ 0 = T_z + N - mg \end{cases}$$

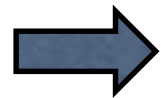
- Théorème du moment cinétique

$$\vec{T} \text{ est non connu} \Rightarrow \text{application en C} \quad \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{ext}$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = -\frac{1}{2}mR^2\omega\Omega\hat{e}_\theta$$

$$\vec{M}_C^{ext} = \vec{CG} \wedge m\vec{g} + \vec{CA} \wedge \vec{N} = d m g \hat{e}_\theta + \vec{CG} \wedge \vec{N} + \vec{GA} \wedge \vec{N} = d m g \hat{e}_\theta - dN\hat{e}_\theta$$

$$-\frac{1}{2}mR^2\omega\Omega\hat{e}_\theta = d m g \hat{e}_\theta - dN\hat{e}_\theta$$

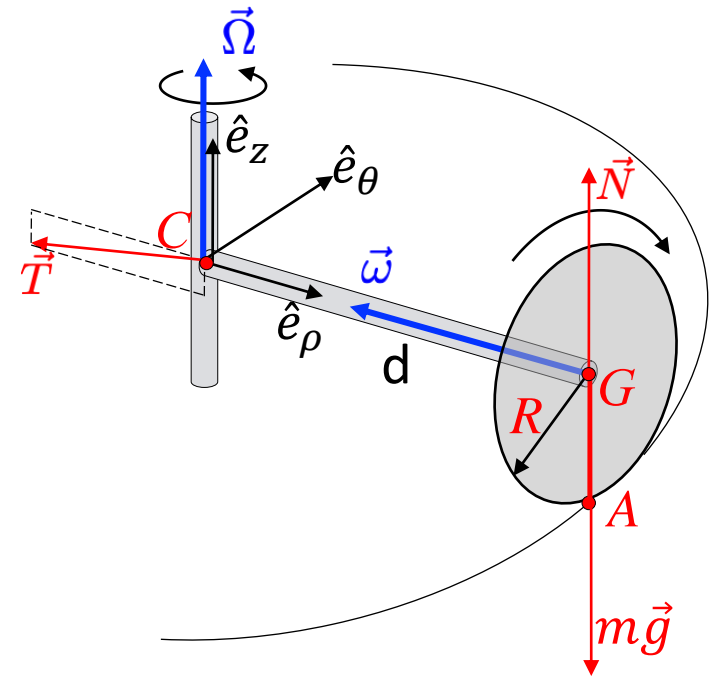


$$-\frac{1}{2}mRd\Omega^2 = d m g - dN$$

$$\omega R = \Omega d$$



$$N = mg + \frac{1}{2}mR\Omega^2$$



8.3 Ex.: Meule tournante à vitesse constante

$$\vec{\omega} = -\omega \hat{e}_\rho, \quad \vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_z, \quad \omega R = \Omega d, \quad \vec{a}_G = -d\Omega^2 \hat{e}_\rho, \quad \vec{v}_G = (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \vec{CG}$$

- Théorème du moment cinétique

$$\vec{T} \text{ est non connu} \Rightarrow \text{application en C} \quad \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{ext}$$

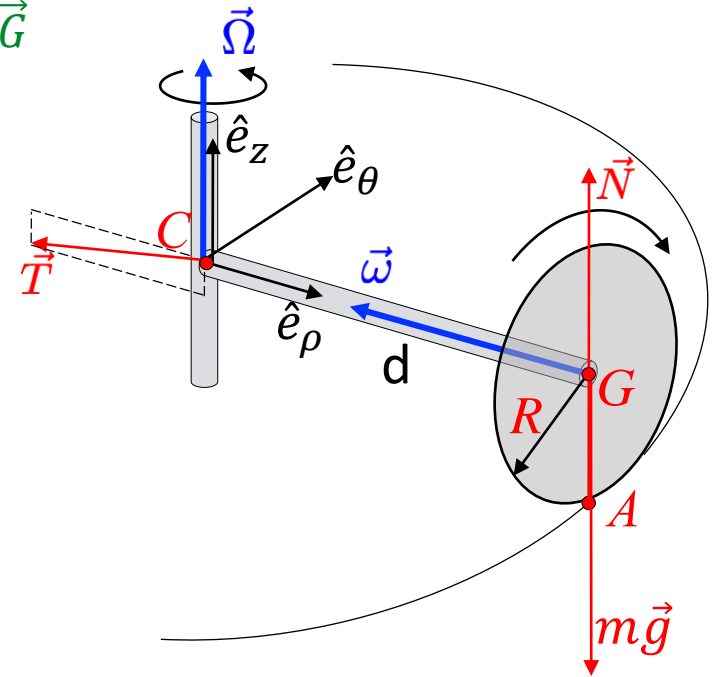
$$\vec{L}_C = \vec{L}_G + \vec{CG} \wedge m\vec{v}_G \quad (1^{\text{er}} \text{ théorème de König})$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_C &= \vec{L}_G + \vec{CG} \wedge m\vec{v}_G = \vec{L}_G + d\hat{e}_\rho \wedge md\Omega\hat{e}_\theta = \\ &= \vec{L}_G + md^2\Omega\hat{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_G &= \tilde{I}_G \cdot (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) = (\tilde{I}_G)_{11}\vec{\omega} + (\tilde{I}_G)_{33}\vec{\Omega} \\ &= -\frac{1}{2}mR^2\omega\hat{e}_\rho + \frac{1}{4}mR^2\Omega\hat{e}_z \end{aligned}$$

$$\vec{L}_C = \vec{L}_G + md^2\Omega\hat{e}_z = -\frac{1}{2}mR^2\omega\hat{e}_\rho + \frac{1}{4}mR^2\Omega\hat{e}_z + md^2\Omega\hat{e}_z = -\frac{1}{2}mR^2\omega\hat{e}_\rho + \left(\frac{1}{4}mR^2 + md^2\right)\Omega\hat{e}_z$$

$$\frac{d\hat{e}_z}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_C}{dt} = -\frac{1}{2}mR^2\omega \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = -\frac{1}{2}mR^2\omega (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \hat{e}_\rho = -\frac{1}{2}mR^2\omega \Omega \hat{e}_\theta$$



$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} 1/2mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4mR^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \quad \vec{CG} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$